

## 8. Matematičko modelovanje

Prof.dr Igor Radusinović

igorr@ucg.ac.me

dr Slavica Tomović

slavicat@ucg.ac.me

Telekomunikacione mreže 8-1

1

## Matematičko modelovanje

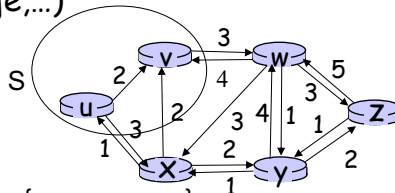
- Grafovi
- Jackson-ove mreže
- Kontrola zagušenja
- Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja
- Bežično čvorište

Telekomunikacione mreže 8-2

2

## Grafovi

- Čvorovi
- Grane
- Težinski faktori grana
- "Cut" (podskup skupa čvorova)
- Široka primjena (algoritmi rutiranja, modelovanje P2P komunikacije,...)



Graf:  $G = (N, E)$

$N = \text{skup čvorova} = \{ u, v, w, x, y, z \}$

$E = \text{skup grana} = \{ (u,v), (u,x), (v,x), (v,w), (x,w), (x,y), (w,y), (w,z), (y,z) \}$

$S = \text{cut} = \{ u, v \}$

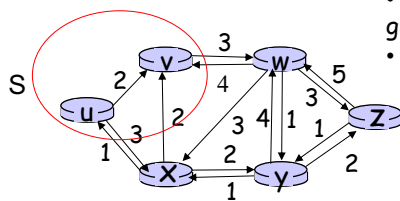
$S^c = N/S = \{ x, y, w, z \}$

Telekomunikacione mreže 8-3

3

## Grafovi

Kapacitet cut-a



- Kapacitet cut-a  $S$  jednak je sumi težinskih grana koje izlaze iz njega i ulaze u  $S^c$
- $c(S) = c(v,w) + c(u,x) = 3 + 3 = 6$

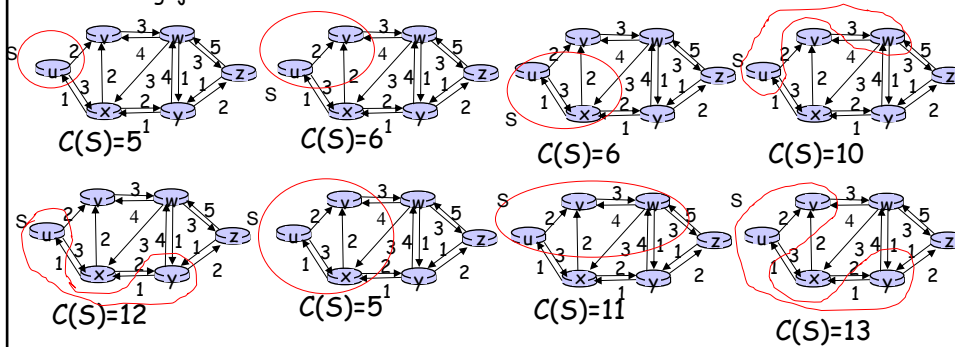
Telekomunikacione mreže 8-4

4

# Grafovi

## MAX-FLOW MIN-CUT teorema

- Rješava problem određivanja maksimalne propusnosti toka koji se može uspostaviti između dva čvorovišta.
- Neka težinski faktor predstavlja kapacitet linka.
- Max-flow min-cut teorema kaže da je maksimalna vrijednost propusnosti toka koji se može uspostaviti između čvorova  $u$  i  $z$  jednaka minimalnom kapacitetu cut-ova  $S$  gdje  $u \in S$  a  $z \in S^c$ .

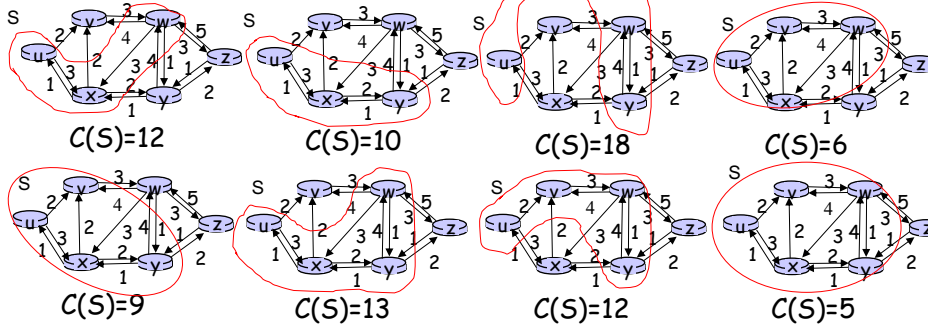


Telekomunikacione mreže 8-5

5

# Grafovi

## MAX-FLOW MIN-CUT teorema



Očigledno je maksimalna propusnost toka od  $u$  do  $z$  za mrežu abstrahovanu zadatim grafom jednaka 5.

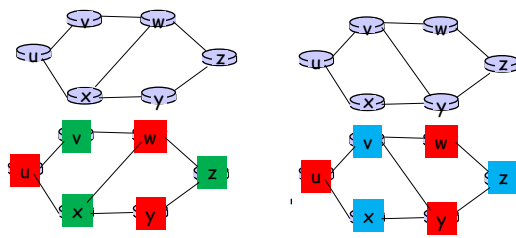
Telekomunikacione mreže 8-6

6

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

- Neusmjereni graf se sastoji od čvorova povezanih neusmjerenim granama.
- Dva čvora su susjedna ako su povezani granom.
- Graf je povezan ako se svaki čvor može doseći iz svakog čvora.
- Graf je potpuno povezan ako su bilo koja dva čvora povezana granom.
- Stepennost čvora je jednak broju njegovih susjeda.
- Maksimalni stepennost grafa jednak je maksimalnom stepenu njegovih čvorova.
- Bojenje grafa predstavlja dodjelu boje svakom čvoru tako da nijedan par susjeda nema istu boju.
- Minimalan potreban broj boja za bojenje grafa se zove hromatski broj grafa.



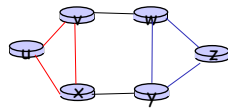
Telekomunikacione mreže 8-7

7

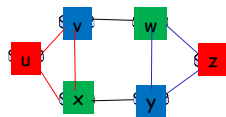
## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

- *Clique* je podskup neusmjerenog grafa kod koga su svaka dva čvora susjedi.
- Svi čvorovi u *clique* moraju biti različite boje.
- Maksimalan broj čvorova u *clique* predstavlja donju granicu hromatskog broja grafa.



Koliki je hromatski broj ovog grafa (ima 2 clique)?

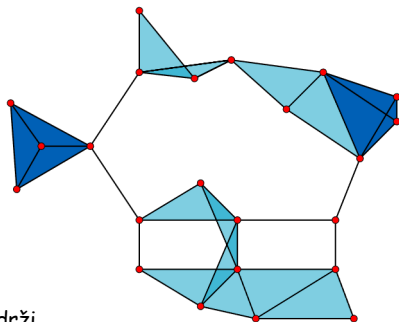


Telekomunikacione mreže 8-8

8

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli



Graf sa slike sadrži

- 23 jednočvorna clique-a (čvorovi),
- 42 dvočvorna clique-a (grane),
- 19 tročvornih clique-ova (svijetlo plavi trouglovi), i
- 2 četvoročvorna clique-a (tamno plave površine).

Koliko iznosi donja granica hromatskog broja grafa sa slike?

Kako izgledaju clique-ovi sa pet i šest članova?

Telekomunikacione mreže 8-9

9

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

#### Brook-ova teorema

U povezanom grafu u kome svaki čvor ima najviše  $\Delta$  susjeda, čvorovi mogu biti obojeni sa svega  $\Delta$  boja, izuzev u slučajevima:

- Potpuno povezanog grafa,
- Grafa u formi prstena,

kojima je potrebno  $\Delta + 1$  boja.

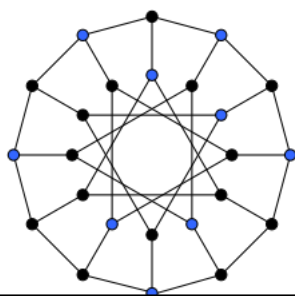
Telekomunikacione mreže 8-10

10

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

- Čvorovi u grafu  $G$  predstavljaju bežična čvorišta.
- Čvorovi su povezani granom ako jedan drugom izazivaju interferenciju.
- Ovako definisan graf je graf konflikta.
- Ako se na ovakvom grafu primijeni tehnika bojenje grafa onda svi čvorovi koji imaju istu boju mogu da šalju podatke bez interferencije i čine nezavisan skup čvorova.
- Maksimalni nezavisni skup čvorova grafa  $G$  je nezavisni skup čvorova sa najvećim brojem čvorova, koji predstavlja broj nezavisnosti grafa  $G$ .



Devet plavih čvorova formiraju maksimalni nezavisni podskup grafa (Generalizovani Petersonov graf)

Telekomunikacione mreže 8-11

11

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

#### Primjena 1

- Neka čvorovi grafa predstavljaju WiFi *access point*-e.
- Boje predstavljaju različite kanale.
- Bojenje osigurava da *access point*-i međusobno ne interferiraju.
- Slična primjena je i kod baznih stanica.

Telekomunikacione mreže 8-12

12

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 2: Alokaciji vremenskih slotova u bežičnoj mesh mreži sa N čvorišta.

- Neka paketi dolaze na bežična čvorišta koji ih moraju poslati.
- Radi jednostavnosti neka se paketi šalju samo jedanput a onda napuštaju mrežu.
- Neka je  $\lambda_i$  dolazna brzina paketa na čvoru  $i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ).
- Neka je vektor brzine u mreži  $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N)$ .
- Postavlja se pitanje kada je moguće da bežični čvorovi šalju podatke ovim brzinama tako da nema međusobne interferencije ( $\lambda$  je *feasible* brzina)?
- Bežični čvorovi se mogu organizovati u nezavisne skupove  $S$  čiji članovi neinterferiraju.
- Neka su  $(S_1, S_2, \dots, S_K)$  maksimalni nezavisni skupovi a  $p=(p_1, p_2, \dots, p_K)$  vektor vjerovatnoća koje zadovoljavaju uslov normalizovanosti ( $p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$ ).
- Ako čvorovi nezavisnog seta  $S_k$  šalju podatke tokom  $p_k$  dijela vremena tada čvor  $i$  šalje podatke tokom

$$\sum_{k=1}^K p_k 1\{i \in S_k\}$$

dijela vremena.

- Do interferencije neće doći ako za svako čvorište važi

$$\lambda_i \leq \sum_{k=1}^K p_k 1\{i \in S_k\}$$

Telekomunikacione mreže 8-13

13

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 2: Alokaciji vremenskih slotova u bežičnoj mesh mreži sa N čvorišta.

Prethodno se implementira na sledeći način

- Izračuna se vektor  $p$ .
- Kreira se slot koji je dovoljno velik za prenos paketa.
- Odabere se neki broj  $M$ .
- Periodično se alokira svakih  $M$  slotova približno  $p_k M$  slotova čvorovima nezavisnog seta  $S_k$ .
- Ovaj TSMP (*Time-Synchronized Mesh Protocol*) protokol je pogodan kada se brzine slanja sporije mijenjaju u odnosu na vrijeme koje je potrebno za izračunavanje vektora  $p$  i realokacije vremenskih slotova.

Telekomunikacione mreže 8-14

14

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 3: Q-CSMA (*Queue-based Carrier Sense Multiple Access*)

- Kada čvorište želi da šalje podatke čeka dok se kanal ne oslobodi.
- Kada se kanal oslobodi čvorište odbrojava timer čija je početna vrijednost slučajan broj čija srednja vrijednost, između ostalog, zavisi od broja čvorova koji se takmiče za kanal.
- Timer odbrojava samo kada je kanal slobodan.
- Kada timer istekne čvorište šalje frejm.
- Može se pokazati da i za ovaj MAC protocol važi

$$\lambda_i \leq \sum_{\substack{k=1 \\ i \in S_k}}^K p_k$$

- Sa nekim pozitivnim gap-om  $\epsilon$ .
- Na žalost, kašnjenje paketa raste kada je  $\epsilon$  malo.

## Grafovi

### Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 3: Q-CSMA (*Queue-based Carrier Sense Multiple Access*)

- Q-CSMA se kombinuje sa kontrolom prihvatanja paketa u bafer koja prestaje sa prihvatanjem paketa ako popunjenost bafera pređe neku vrijednost koja zavisi od nivoa prioriteta.
- Kontrola prihvatanja efikasno podešava brzinu tako da je ona *feasible* i favorizuje pakete visokog prioriteta.
- Može da bira kašnjenja koja su prihvatljiva visoko prioritetnim paketima
- Prednost Q-CSMA u odnosu na TSMP je što ne zahtijeva poznavanje  $\lambda$ , automatski se adaptira na promjenu uslova i ne troši resurse prilikom alociranja slotova.



## Jackson-ove mreže

- Najjednostavniji model mreže međupovezanih  $M/M/1$  redova čekanja.
- Neka na ulaze Jackson-ove mreže sa  $N$  redova čekanja dolazi  $C$  različitih klasa saobraćaja koje imaju Poasonove raspodjele parametara  $\lambda_c$  ( $c=1,2,\dots,C$ ).
- Paket klase  $c$  se prenosi preko nekog skupa redova čekanja  $S(c) \subset \{1,2,\dots,N\}$  pri čemu se vodi računa o redosledu prolaska, pri tome je pretpostavka da paket prolazi kroz red čekanja samo jedanput.
- Ukupna dolazna brzina na ulaze mreže je

$$\lambda = \sum_{c=1}^C \lambda_c$$

- Brzina kojom paketi dolaze na neki red čekanja  $j$  iznosi

$$\gamma_j = \sum_{\substack{c=1 \\ j \in S(c)}}^C \lambda_c$$

- Odnosno jednaka je sumi Poasonovih brzina klasa koje prolaze kroz njega.

Telekomunikacione mreže 8-17

17

## Jackson-ove mreže

- Vrijeme posluživanja u redu čekanja  $j$  je nezavisno od dolazaka i vremena posluživanja u drugim redovima čekanja, a ima eksponencijalnu raspodjelu parametra  $\mu_j$  koja je identična za svaku klasu  $c$ .
- Pretpostavlja se da je

$$\gamma_j < \mu_j$$

- za svako  $j$ .
- Ključni rezultati za Jackson-ovu mrežu se odnose na srednje kašnjenje u klasi  $c$  i srednji broj paketa u redu čekanja  $j$ .
- Srednje kašnjenje  $W_c$  paketa klase  $c$  od njegovog ulaska do izlaska iz mreže je

$$W_c = \sum_{j \in S(c)} \frac{1}{\gamma_j - \mu_j}$$

- Srednji broj paketa u redu čekanja  $j$  je

$$L_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \mu_j}$$

- Prethodni rezultati pokazuju da se redovi čekanja u Jackson-ovoj mreži ponašaju kao  $M/M/1$  redovi čekanja iako to nisu jer njihovi dolasci ne moraju biti *memoryless*.

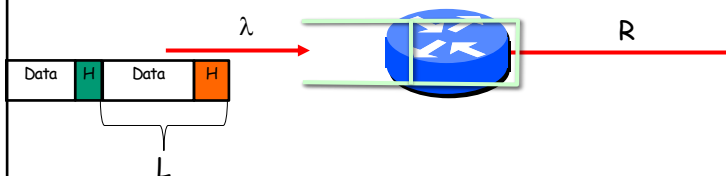
Telekomunikacione mreže 8-18

18

## Primjena redova čekanja

### Primjer 1: Bafer u mrežnom čvorištu

- U telekomunikacionim mrežama vrijeme posluživanja paketa je jednako kašnjenju uslijed prenosa
- Neka je dužina paketa  $L$  promjenljiva i može se opisati nezavisnom eksponencijalnom slučajnom promjenljivom srednje dužine  $L$  bita
- Ako je brzina prenosa na linku  $R$  onda vrijeme posluživanja ima eksponencijalnu raspodjelu parametra  $\mu = \frac{L}{R}$ .
- Dodatno ako se dolazak paketa može opisati Poasonovim dolaznim procesom parametra  $\lambda$ , onda se red čekanja u baferu može približno modelovati  $M/M/1$  redom čekanja.



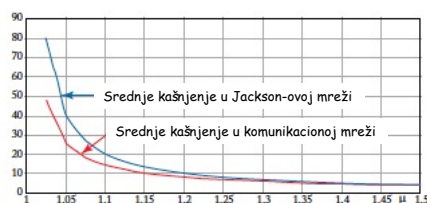
Telekomunikacione mreže 8-19

19

## Primjena redova čekanja

### Primjer 2: Dva bafera mrežnih čvorišta povezanih linkom

- Nakon napuštanja reda čekanja (mrežnog čvorišta) paketi stižu na sledeći red čekanja (mrežno čvorište) i dalje nastavljaju saglasno store & forward komutaciji.
- Jasno je da vremena dolazaka nijesu nezavisna od vremena posluživanja.
- Vrijeme dolaska između dva susjedna paketa  $n$  i  $n+1$  ne može biti manje od trajanja prenosa paketa  $n$ .
- Prema tome, vrijeme dolaska paketa  $n+1$  zavisi od vremena odlaska paketa  $n$  u narednom redu čekanja.
- Mreža sa dva redno povezana reda čekanja zato nije prava Jackson-ova mreža.
- Međutim, rezultati simulacija pokazuju da su odstupanja mala tako da se dva redno povezana reda čekanja mogu aproksimirati i modelovati Jackson-ovom mrežom.



Telekomunikacione mreže 8-20

20

## Primjena redova čekanja

### Primjer 3: Balansiranje saobraćaja u mreži

- Balansiranje saobraćaja je važna funkcija mreže koja se može modelovati Jackson-ovom mrežom
- Neka postoje dva puta kroz mrežu za prenos paketa od izvora do destinacije preko kojih se odgovarajućim balansiranjem saobraćaja može smanjiti kašnjenje koje unosi mreža.
- Neka paketi dolaze saglasno Poasonovoj raspodjeli parametra  $\lambda$  i mogu nastaviti preko jednog od dva reda čekanja čije su brzine posluživanja  $\mu_1$ , odnosno  $\mu_2$ .
- Pretpostavka je da sa vjerovatnoćom  $p$  paketi odlaze na prvi red čekanja a sa vjerovatnoćom  $1-p$  na drugi, pri čemu je izbor nezavisan.
- Prethodno znači da paketi na ulaz prvog bafear dolaze saglasno Poasonovoj raspodjeli parametra  $\lambda p$ , odnosno na ulaz drugog bafera saglasno Poasonovoj raspodjeli parametra  $\lambda(1-p)$ .
- Ako je  $\lambda p < \mu_1$  i  $\lambda(1-p) < \mu_2$  onda su srednja kašnjenja koje unose prvi i drugi red čekanja  $\frac{1}{\mu_1 - \lambda p}$ , odnosno  $\frac{1}{\mu_2 - \lambda(1-p)}$
- Pošto paket prvo kašnjenje ima sa vjerovatnoćom  $p$ , a drugo sa vjerovatnoćom  $1-p$ , srednje kašnjenje koje unosi balanser saobraćaja iznosi
$$T = \frac{p}{\mu_1 - \lambda p} + \frac{1-p}{\mu_2 - \lambda(1-p)}$$
- Može se pokazati da ravnomjerno balansiranje ( $p=0,5$ ) ne garantuje minimalno  $T$ .
- Ako se pretpostavi da je  $\lambda < \mu_1 + \mu_2$  minimalno  $T$  se dobija za

$$p = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1} + \mu_1\sqrt{\mu_2} - \mu_2\sqrt{\mu_1}}{\lambda(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})}$$

Telekomunikacione mreže 8-21

21

## Primjena redova čekanja

### Primjer 3: Balansiranje saobraćaja u mreži

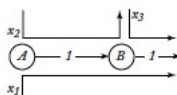
- Kako se za  $\lambda < \mu_1 + \mu_2$  minimalno  $T$  dobija korišćenjem relacije
$$p = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1} + \mu_1\sqrt{\mu_2} - \mu_2\sqrt{\mu_1}}{\lambda(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})}$$
- za  $\mu_1 = \mu_2$  dobija se da je  $p=0,5$  što je saglasno intuiciji.
- Međutim za  $\lambda = 1 = \mu_1$  i  $\mu_2 = 2$  dobija se da je  $p$  približno 0.17, odnosno da je kašnjenje u prvom redu čekanja  $\frac{1}{\mu_1 - \lambda p} \approx 1.2$  a u drugom  $\frac{1}{\mu_2 - \lambda(1-p)} \approx 0.85$
- To znači da optimalno balansiranje ne izjednačava srednje kašnjenje u redovima čekanja.
- Prethodno se može negativno odraziti na primjer ns usmjeravanje datagrama istog TCP toka što se izbjegava pristupom da se paketi sa istim izvorišnim/odredišnim IP adresama i brojevima portova prenose istim putanjama.

Telekomunikacione mreže 8-22

22

## Kontrola zagušenja

- Već je rečeno da kontrola zagušenja predstavlja sprečavanje zagušenja mreže ili nekog njenog dijela
- Pokazano je da TCP kontrola zagušenja može veoma efikasno pristupom od kraja do kraja spriječiti pojavu velikih zagušenja u mreži
- Takođe, TCP kontrola zagušenja garantuje fer podjelu resursa linka koji dijeli više TCP saobraćajnih tokova.
- Neka na ulaz mreže sa dva čvora (A i B) dolaze tri saobraćajna toka brzina  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$ . Brzine tokova su *feasible* ako važe sledeće relacije
 
$$g_a(x) := x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \quad g_b(x) := x_1 + x_3 - 1 \leq 0$$
- a i b su prvi i drugi link kapaciteta 1.
- Brzine  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  i  $x_3 = 1$  su *feasible*, a može se pokazati da obezbeđuju maksimalnu propusnost ( $x_1 + x_2 + x_3$ ) mreže koja je jednaka 2.
- Ova maksimalna propusnost nije fer prema prvom toku koji ne dobija ni jedan dio kapaciteta mreže.
- Brzine  $1/2$ ,  $1/2$  i  $1/2$  su *feasible*, obezbeđuju ravnopravnost svih tokova ali je propusnost mreže svega 1.5



Telekomunikacione mreže 8-23

23

## Kontrola zagušenja

- Treba izbalansirati maksimizovanje propusnosti mreže i fer raspodjelu njenih resursa korišćenjem utility funkcija  $u(x_i)$  za svaki tok i gdje je  $u(x)$  konkavna rastuća funkcija za  $x > 0$ .
- Neka je  $u(x_i)$  utility funkcija za tok 1 koja predstavlja koliko je korisniku vrijedno da brzina toka i iznosi  $x_i$
- Utility funkcija raste sa povećanjem  $x_i$  ali je taj rast sve manje važan kako se  $x_i$  povećava (konkavnost funkcije).
- Cilj je da se pronade  $x = (x_1, x_2, x_3)$  tako da je  $f(x) = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3)$  maksimalno
- Neka je na primjer

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \log(x), & \alpha = 1 \end{cases}$$

- Za  $\alpha \neq 1$  cilj je

$$\text{maksimizovati funkciju } f(x) = \frac{1}{1-\alpha} (x_1^{1-\alpha} + x_2^{1-\alpha} + x_3^{1-\alpha})$$

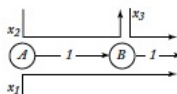
uz uslov da važi  $x_1 + x_2 \leq 1$  i  $x_1 + x_3 \leq 1$

- Kako  $f(x)$  raste za svako  $x_i$  jasno je da rješenje mora biti tako da važi

$$x_1 + x_2 = 1 = x_1 + x_3$$

- Neka je  $x = x_1$  tada je

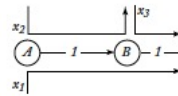
$$x_2 = x_3 = 1 - x$$



Telekomunikacione mreže 8-24

24

## Kontrola zagušenja



- Na osnovu prethodnog

$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} + 2(1-x)^{1-\alpha})$$

Koja je maksimalna za

$$x = \frac{1}{1+2\alpha}$$

- Rješenje  $(x, 1-x, 1-x)$  se kreće
  - od  $(0,1,1)$  koje obezbjeđuje maksimalnu propusnost
  - Do  $(1/2, 1/2, 1/2)$  koja obezbjeđuje fer podjelu resursa
- Zanimljivo je vidjeti vrijednosti  $x_1, x_2$  i  $x_3$  koje maksimizuju funkciju  $f(x)$  u zavisnosti od  $\alpha$
- Vidi se da promjena  $\alpha$  od nule do beskonačnosti znači promjenu od maksimizovane sume brzina do maksimizovanja minimalne pojedinačne brzine



- Izbor parametra  $\alpha$  za razmatrani slučaj obezbjeđuje mogućnost balansiranja dva oprečna zahtjeva: maksimalne propusnosti mreže i fer podjele resursa

Telekomunikacione mreže 8-25

25

## Kontrola zagušenja

- U prethodnom slučaju je razmatrana u potpunosti poznata mreža što je rijedak slučaj
  - Izvori saobraćaja u realnim mrežama kontrolišu svoje brzine slanja na bazi lokalnih informacija
  - U opštem slučaju se koristi Lagranžova funkcija
- Teorema: Neka je  $f(x)$  konkavna funkcija, a  $g_j(x)$  ( $j=a,b$ ) konveksna funkcija po  $x$ . Tada  $x^*$  predstavlja rješenje (tzv. primalnog problema)

$$\text{Maksimizuj } f(x) \\ \text{pod uslovom da je } g_j(x) \leq 0, j = a, b$$

Ako i samo ako  $x^*$  zadovoljava prethodno ograničenje i

$$x^* \text{ maksimizuje } L(x, \lambda^*) := f(x) - \lambda_a^* g_a(x) - \lambda_b^* g_b(x)$$

za  $\lambda_a^* \geq 0$  i  $\lambda_b^* \geq 0$  takve da je  $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0$ , za  $j = a, b$

Dodatno ako je

$$L(x(\lambda), \lambda^*) = \max_x L(x, \lambda)$$

Onda  $\lambda_a^*$  i  $\lambda_b^*$  minimizuju

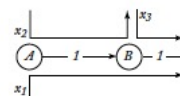
$$L(x(\lambda), \lambda)$$

- $L$  se naziva Lagranževom funkcijom a  $\lambda_a^*$  i  $\lambda_b^*$  Lagranževim množiocima (*shadow prices*)

Telekomunikacione mreže 8-26

26

## Kontrola zagušenja



- Primjenom prethodnog na ranije razmatranu mrežu ( $f(x) = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3)$ ,  $g_a(x) = x_1 + x_2$ ,  $g_b(x) = x_2 + x_3$ ) dobija se

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda_a g_a(x) - \lambda_b g_b(x) = (u(x_1) - (\lambda_a + \lambda_b)x_1) + (u(x_2) - \lambda_a x_2) + (u(x_3) - \lambda_b x_3)$$

- Treba pronaći  $x(\lambda)$  koja maksimizuje  $L(x, \lambda)$  za fiksnu vrijednost  $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$
- $x_1$  maksimizuje  $u(x_1) - (\lambda_a + \lambda_b)x_1$ ,  $x_2$  maksimizuje  $u(x_2) - \lambda_a x_2$ , a  $x_3$  maksimizuje  $u(x_3) - \lambda_b x_3$
- Fizički smisao prethodnog je da svaki link  $j$  „tarifira“ korisniku svakog toka „cijenu“  $\lambda_j$  po jedinici brzine.
- Na taj način korisnik prvog toka „plaća“  $(\lambda_a + \lambda_b)x_1$  zato što tok ide preko dva linka. Zbog toga korisnik bira  $x_1$  tako da maksimizuje utility funkciju  $u(x_1) - (\lambda_a + \lambda_b)x_1$
- Slično važi i za ostala dva toka
- Ključno zapažanje je da je maksimizacija  $L$  podijeljena na maksimizaciju za svakog korisnika.
- Uparivanje varijabli  $x$  u originalni problem je urađeno zbog uslova ograničenja.
- Maksimizacija  $L$  nije uslovljena ograničenjima i rastavljena je na posebne probleme za svaku varijablu.
- Prethodna dekompozicija se dešava jer su uslovna ograničenja linearna u tokovima, tako da se varijabla  $x_i$  pojavljuje u različitim izrazima sume  $L$ .
- Takođe, treba primijetiti da je cijena koji svaki link „tarifira“ za svaki od svojih tokova ista.

Telekomunikacione mreže 8-27

27

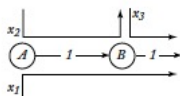
## Kontrola zagušenja

- Da bi se pronašli množitelji  $\lambda^*$  koristi se gradijentni algoritam za minimizaciju  $L(x, \lambda)$

$$\lambda_j(n+1) = \lambda_j(n) - \beta \frac{d}{d\lambda_j} L(x(\lambda), \lambda) = \lambda_j(n) + \beta g_j(x)$$

gdje je  $x$  vektor brzina u koraku  $n$  a  $\beta$  je parametar koji kontroliše korak algoritma

- U svakom koraku  $n$  algoritam podešava  $\lambda$  u smjeru suprotnom od gradijenta funkcije  $L(x(\lambda), \lambda)$  koji predstavlja najstrmiji pad funkcije.
- Za novu vrijednost cijene korisnici podešavaju svoje brzine tako da se približavaju  $x(\lambda)$  za novu cijenu.
- To znači da korisnik 1 u koraku  $n$  određuje svoju brzinu na sledeći način  
 $x_1(n)$  maksimizuje  $u(x_1(n)) - (\lambda_a(n) + \lambda_b(n))x_1(n)$
- Slično važi za  $x_2(n)$  i  $x_3(n)$

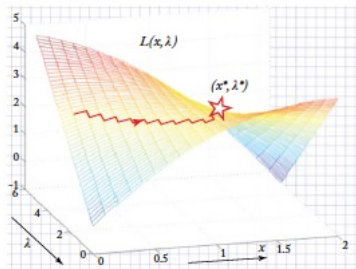


Telekomunikacione mreže 8-28

28

## Kontrola zagušenja

- Slika ilustruje funkcionisanje gradijentnog algoritma
- Vidi se da algoritam podešava  $x$  u pravcu gradijenta funkcije  $L(x(\lambda), \lambda)$  po  $x$ , zatim  $\lambda$  u pravcu koji je suprotan gradijentu funkcije  $L(x(\lambda), \lambda)$  po  $\lambda$
- Algoritam traži tačku „sedla“ koja je označena na slici
- Tačka „sedla“  $(x^*, \lambda^*)$  je minimum po  $\lambda$  od maksimuma funkcije  $L(x(\lambda), \lambda)$  po  $x$ .



Telekomunikacione mreže 8-29

29

## Kontrola zagušenja

- Radi ilustracije kako čvorišta izračunavaju cijenu, neka je  $q_j(t)$  popunjenost reda čekanja na čvoru  $j$  u trenutku  $t$
- Ovaj red čekanja se povećava brzinom koja je jednaka razlici između ukupne dolazne brzine i brzine posluživanja.
- U malom intervalu vremena  $\tau$

$$q_j((n+1)\tau) = q_j(n\tau) + \tau g_j(x)$$

gdje je  $x$  vektor brzina u trenutku  $n\tau$

- Ako se napravi poređenje prethodne relacije sa relacijom

$$\lambda_j(n+1) = \lambda_j(n) - \beta \frac{d}{d\lambda_j} L(x(\lambda), \lambda) = \lambda_j(n) + \beta g_j(x)$$

- za  $\lambda_j(n+1)$  i  $q_j((n+1)\tau)$  može se zaključiti da ako se gradijentni algoritam izvršava svakih  $\tau$  sekundi onda

$$\lambda_j \approx \left(\frac{\beta}{\tau}\right) q_j$$

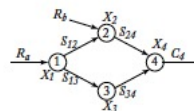
- Prema ovom izrazu trebalo bi uzimati da je cijena linka proporcionalna zauzetosti reda čekanja.
- To znači da kada se red čekanja puni link bi trebao da bude „skuplji“ što korisnike prisiljava da smanje brzinu. Jasno je da važi slično i za praznjenje reda čekanja.
- TCP kontrola zagušenja radi sličnu stvar pri čemu je razlika u tome što mnogo zavisi od RTT i broja tokova koji dijele link.

Telekomunikacione mreže 8-30

30

## Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja

- Na slici je prikazana mreža sa 4 čvora čija je trenutna popunjenost bafera  $X_1, X_2, X_3$  i  $X_4$
- Dva toka se prenose mrežom i imaju brzine  $R_a$  i  $R_b$ .
- $S_{ij}$  predstavlja brzinu kojom čvor  $i$  šalje podatke čvoru  $j$
- $C_i$  predstavlja ukupni prenosni kapacitet čvora  $i$
- Suma brzina tokova koji izlaze iz čvora  $i$  mora biti manja od  $C_i$



- Cilj je maksimizovati sumu utility funkcija  $u_a(R_a) + u_b(R_b)$

- Pri čemu treba spriječiti nagli porast popunjenosti bafera
- Funkcije  $u_a$  i  $u_b$  su pozitivne i konkavne što znači da korisnici imaju veću korist od porasta brzine ali se ta korist smanjuje sa povećanjem brzine
- Neka je

$$u_j(x) = k_j \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, j = a, b, \alpha > 0, \alpha \neq 1 \text{ i } k_j > 0$$

- Da bi se postigao zacrtani cilj treba maksimizovati brzine  $R_a, R_b, S_{12}, S_{13}, S_{24}$  i  $S_{34}$  za neko  $\beta > 0$ .

$$\phi := \beta [u_a(R_a) + u_b(R_b)] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 X_i^2(t) \right]$$

- Kako bi se maksimizovao ovaj izraz treba odabrati brzine koje obezbjeđuju veliku vrijednost  $u_a(R_a) + u_b(R_b)$  i veliko smanjenje sume kvadrata zauzetosti bafera
- Parametar  $\beta$  određuje kompromis između velike utility funkcije i velike zauzetosti bafera. Za veliko  $\beta$  više se težira utility funkcija od zauzeća bafera.

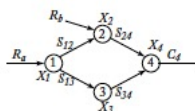
Telekomunikacione mreže 8-31

31

## Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} X_2^2(t) \right] = X_2(t) \frac{d}{dt} X_2(t) = X_2(t) [R_b + S_{12} - S_{24}]$$

- Zato što je brzina promjene brzine  $X_2(t)$  jednaka razlici dolazne brzine  $R_b + S_{12}$  i odlazne brzine  $S_{24}$
- Slično važi i sa ostale čvorove tako da se može izvesti da je  $\phi =$   
 $= \beta [u_a(R_a) + u_b(R_b)] - X_1(t) [R_a - S_{12} - S_{13}] - X_2(t) [R_b + S_{12} - S_{24}] - X_3(t) [S_{13} - S_{34}] - X_4(t) [S_{24} + S_{34} - C_4]$   
 $= [\beta u_a(R_a) - X_1(t) R_a] + [\beta u_b(R_b) - X_2(t) R_b] + S_{12} [X_1(t) - X_2(t)] + S_{13} [X_1(t) - X_3(t)] + S_{24} [X_2(t) - X_4(t)] + S_{34} [X_3(t) - X_4(t)] + C_4 X_4(t)$
- Maksimizacija je laka jer različiti izrazi uključuju različite varijable, pri tome poslednji član sume ne sadrži nijednu varijablu za odlučivanje



Telekomunikacione mreže 8-32

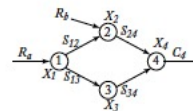
32



## Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja

- Prema tome

$$\begin{aligned}
 R_a & \text{ maksimizuje } \beta u_a(R_a) - X_1(t)R_a \\
 R_b & \text{ maksimizuje } \beta u_b(R_b) - X_2(t)R_b \\
 S_{12} & = C_1 \text{ ako je } X_1(t) > X_2(t) \text{ i } X_2(t) < X_3(t) \\
 S_{13} & = C_1 \text{ ako je } X_1(t) > X_3(t) \text{ i } X_3(t) < X_2(t) \\
 S_{24} & = C_2 \text{ ako je } X_2(t) > X_4(t) \\
 S_{34} & = C_3 \text{ ako je } X_3(t) > X_4(t)
 \end{aligned}$$



- Izvor a (b) podešava svoju brzinu  $R_a$  ( $R_b$ ) na bazi zauzetosti bafera  $X_1(t)$  ( $X_2(t)$ ) na čvoru 1 (2).
- Konkavnost funkcije  $u_j$  utiče da se  $R_a$  ( $R_b$ ) smanjuje sa  $X_1(t)$  ( $X_2(t)$ ).
- Ako se uzme ranije definisana utility funkcija, može se pokazati da važi

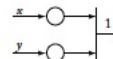
$$R_a = \left[ \frac{k_a}{X_1(t)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \text{ i } R_b = \left[ \frac{k_b}{X_2(t)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Primjećuje se da čvor 1 šalje pakete sledećem čvoru (2 ili 3) koji ima manju zauzetost obezbeđujući da je ona manja od  $X_1(t)$  što ako nije ispunjeno nalaže čvoru 1 da prestane sa slanjem.
- Čvor 2 i čvor 3 šalju podatke sve dok njihova zauzetost bafera ne pređe zauzetost bafera u čvoru 4.
- Pošto brzine  $R_a$  i  $R_b$  teže nuli kada  $X_1(t)$  i  $X_2(t)$  rastu, jasno je da će mreža biti stabilna.
- U realnim mrežama postoji kašnjenje u informisanju stanja bafera i čvorovi ne šalju bite nego pakete, što ne utiče na veliko odstupanje stvarnih rezultata od modela.
- Ovaj mehanizam kontrole zagušenja se naziva *backpressure* mehanizmom i lako se implementira jer je algoritmu za odlučivanje dovoljna informacija o popunjenosti bafera njegovih susjednih čvorova kojima prosleđuje saobraćaj.

Telekomunikacione mreže 8-33

33

## Modelovanje bežičnog čvorišta



- U žičnim mrežama link „vidi“ zauzetost svog bafera.
- U bežičnim mrežama ako dva čvora dijele isti kanal oni nijesu „svjesni“ o ukupnom broju paketa koji čekaju na prenos preko linka.
- Neka dva čvora dijele isti kanal kapaciteta 1 i neka su utility funkcije za tok 1  $\log(x)$  a za tok  $2\log(y)$
- Optimizacioni problem je

$$\begin{aligned}
 & \text{Maksimizovati } f(x, y) = \log(x) + 2\log(y) \\
 & \text{uz ograničenje da je } x + y \leq 1
 \end{aligned}$$

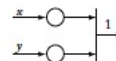
- Ako se koristi već opisani dualni algoritam može se zaključiti da bi čvorovi trebali da podešavaju  $x$  i  $y$  na bazi ukupnog broja paketa koji čekaju na prenos preko linka. Međutim čvorovi nemaju tu informaciju.
- Može se uočiti i pristup po kome bi čvorovi razmjenjivali informacije o zauzetostima svojih bafera što je veoma kompleksno posebno u velikim mrežama.
- Pristup koji je realan je da se za svaki čvor prati procenat vremena  $p_1$ , odnosno  $p_2$ , tokom kojeg koristi link. U tom slučaju

$$\begin{aligned}
 & \text{Maksimizovati } f(x, y) = \log(x) + 2\log(y) \\
 & \text{uz ograničenje da je } x \leq p_1 \\
 & \text{uz ograničenje da je } y \leq p_2 \\
 & \text{uz ograničenje da je } p_1 + p_2 \leq 1
 \end{aligned}$$

Telekomunikacione mreže 8-34

34

## Modelovanje bežičnog čvorišta



- Da bi se odredio ovaj distribuirani algoritam uvodi se sledeća modifikacija

$$\begin{aligned} &\text{Maksimizovati } f(x, y) = \log(x) + 2\log(y) + \beta\phi(p_1) + \beta\phi(p_2) \\ &\text{uz ograničenje da je } x \leq p_1 \\ &\text{uz ograničenje da je } y \leq p_2 \\ &\text{uz ograničenje da je } p_1 + p_2 \leq 1 \end{aligned}$$

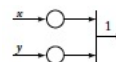
gdje je  $\phi(z)$  ograničena rastuća konkavna funkcija

- Ako se uzme da je  $\beta$  malo onda je to veoma mala modifikacija prethodne jednačine
- Ako se dvije nejednačine ograničenja zamijene penalty funkcijama dobija se sledeći cilj optimizacije

$$\text{Maksimizovati } h(x, y, p_1, p_2; \lambda_1, \lambda_2) = \log(x) + 2\log(y) + \beta\phi(p_1) + \beta\phi(p_2) - \lambda_1(x - p_1) - \lambda_2(y - p_2)$$

- Uslov normalizovanosti se uzima za kasnije

## Modelovanje bežičnog čvorišta



- Ako se maksimizuje funkcija  $h$  po  $x, y, p_1, p_2$  a minimizuje po  $\lambda_1, \lambda_2$  gradijentnim algoritmom dobija se

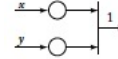
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \lambda_1 \\ \frac{2}{y} &= \lambda_2 \\ \beta\phi'(p_1) + \lambda_1 &= 0 \\ \beta\phi'(p_2) + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1(n+1) &= \lambda_1(n) + \gamma(x(n) - p_1(n)) \\ \lambda_2(n+1) &= \lambda_2(n) + \gamma(y(n) - p_2(n)) \end{aligned}$$

- Kao i ranije poslednje dvije jednačine pokazuju da su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  proporcionalne zauzetosti bafera na čvorovima 1 i 2, respektivno.
- Prve dvije jednačine objašnjavaju vezu kontrole toka i zauzetosti bafera
- Treća i četvrta jednačina se mogu transformisati u

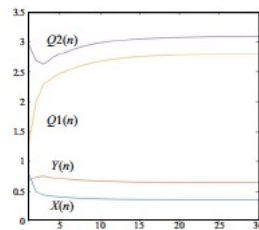
$$p_1 = \psi\left(\frac{\lambda_1}{\beta}\right) \text{ i } p_2 = \psi\left(\frac{\lambda_2}{\beta}\right), \text{ pri čemu je } p_1 + p_2 = 1$$

- $\psi$  je inverzna funkcija izvoda funkcije  $\phi$ . Postoji mnogo funkcija koje zadovoljavaju prethodno jednačine i potrebu da  $p_1$  raste sa povećanjem zauzetosti bafera na čvoru 1, odnosno da  $p_2$  raste sa rastom zauzetosti bafera na čvoru 2.

## Modelovanje bežičnog čvorišta



- Jedno rješenje za pronalaženje  $p_1$  i  $p_2$  može da bude adaptivna CSMA.
- Neka čvor i pokušava da pristupi slobodnom kanalu sa vjerovatnoćom  $a_i$  tokom kratkog slot-a u kome se takmiči sa drugim čvorom.
- Ako je  $a_i$  malo tako da se  $a_1 a_2$  može zanemariti, jasno je da čvor  $i$  zauzima kanal sa vjerovatnoćom  $\frac{a_i}{a_1 + a_2}$
- $a_i$  treba da raste sa povećanjem broja paketa u baferu čvora  $i$ .
- CSMA se brine da je  $p_1 + p_2 = 1$
- Na kraju algoritam bi trebao da izgleda ovako:
  - Svaki čvor pokušava da šalje sa vjerovatnoćom koja raste sa povećanjem zauzetosti njegovog bafera
  - Svaki čvor prihvata novi paket brzinom koja se smanjuje sa povećanjem zauzetosti njegovog bafera
- Ako se na primjer uzme da je
 
$$a_1 = e^{-2Q1(n)} \text{ i } a_2 = e^{-2Q2(n)}$$
- Dobija se



- Isti pristup se može primijeniti na opšti slučaj mutli-hop mreže i može biti kombinovana sa *backpressure* rutiranjem i kontrolom toka